Ecole Supérieure de Commerce de Paris

M 189

CONCOURS D'ENTRÉE 1978

Mathématiques 2e épreuve

VENDREDI 5 MAI 1978 DE 8 à 11 H

Durée : 3 heures

Cette épreuve comporte un problème et deux exercices indépendants.

PROBLEME

Soit $A(\lambda)$ une matrice polynomiale carrée d'ordre n, c'est-à-dire une matrice de n lignes et n colonnes dont les éléments sont des polynômes en λ . Les coefficients de ces polynômes et la variable λ sont supposés réels.

La matrice $A(\lambda)$ peut être écrite sous la forme d'un polynôme en λ dont les coefficients sont des matrices carrées scalaires d'ordre n :

$$A(\lambda) = A_o \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \ldots + A_i \lambda^{m-i} + \ldots + A_{m-1} \lambda + A_m$$

Un tel polynôme est appelé "polynôme matriciel" afin de le différencier d'un polynôme ordinaire à coefficients numériques, appelé polynôme scalaire. Il est nul si et seulement si tous ses coefficients sont des matrices nulles.

Le nombre m est le <u>degré</u> du polynôme $A(\lambda)$ à condition que la matrice A_o soit différente de la matrice nulle ; l'ordre n des matrices $A(\lambda)$ et A_i est <u>l'ordre</u> du polynôme ; le polynôme $A(\lambda)$ est dit <u>régulier</u> si et seulement si le déterminant de A_o (noté det A_o ou $|A_o|$)n'est pas nul.

Les opérations sur les matrices permettent d'étendre aux polynômes matriciels d'ordre n les opérations fondamentales connues sur les polynômes scalaires. Ainsi, étant donnés deux polynômes matriciels $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ de même ordre n et de degrés respectifs m et p avec par exemple $m \geqslant p$,

$$A(\lambda) = A_o \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \ldots + A_m \qquad A_o \neq 0$$

$$B(\lambda) = B_o \lambda^p + B_1 \lambda^{p-1} + \ldots + B_p \qquad B_o \neq 0$$

nous définirons les opérations suivantes :

a) Addition ($\varepsilon = 1$) ou soustraction ($\varepsilon = -1$)

$$A(\lambda) + \varepsilon B(\lambda) = C_o \lambda^m + C_1 \lambda^{m-1} + \ldots + C_i \lambda^{m-i} + \ldots + C_m$$

où les coefficients C_i sont égaux à :

$$\begin{cases} C_i = A_i & \text{si } p < i \leqslant m \\ C_i = A_i + \varepsilon B_{p-i} & \text{si } i \leqslant p \end{cases}$$

b) Multiplication

$$A(\lambda).B(\lambda) = A_o B_o \lambda^{m+p} + (A_o B_1 + A_1 B_o) \lambda^{m+p-1} + \ldots + A_m B_p$$

.../...

QUESTION I

a) Peut-on retrouver sur l'ensemble des polynômes matriciels en λ d'ordre n ainsi définis, une structure d'espace vectoriel sur R ?

b) Le produit de deux polynômes matriciels est-il commutatif ? Que peut-on dire du degré du produit de deux polynômes matriciels de degrés respectifs m et p ?

On suppose $n \leqslant 3$; à quelles conditions sur $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ le produit $A(\lambda).B(\lambda)$ est-il régulier ?

QUESTION II

Soit $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ deux polynômes matriciels de même ordre n et de degrés respectifs m et p, tels que $B(\lambda)$ soit régulier et $m \geqslant p$:

$$A(\lambda) = A_o \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \ldots + A_m \qquad (A_o \neq 0)$$

$$B(\lambda) = B_o \lambda^p + B_1 \lambda^{p-1} + \ldots + B_p \qquad |B_o| \neq 0$$

On appelle respectivement "quotient à droite" et "reste à droite" de la division de $A(\lambda)$ par $B(\lambda)$ les polynômes $Q(\lambda)$ et $R(\lambda)$ satisfaisant aux conditions :

$$\begin{cases} A(\lambda) = Q(\lambda).B(\lambda) + R(\lambda) \\ \text{degré } R(\lambda) < \text{degré } B(\lambda) \end{cases}$$

On admettra que ces polynômes $Q(\lambda)$ et $R(\lambda)$ existent et sont uniques lorsque le diviseur $B(\lambda)$ est un polynôme régulier. Lorsque $R(\lambda) = 0$, $A(\lambda)$ est <u>divisible</u> à droite par $B(\lambda)$.

a) En prenant $m = 3$ et $p = 2$ les polynômes $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ s'écrivent :

$$A(\lambda) = A_o \lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3$$

$$B(\lambda) = B_o \lambda^2 + B_1 \lambda + B_2 \qquad \text{avec } |B_o| \neq 0$$

En appliquant le schéma habituel de la division suivant les puissances décroissantes des polynômes scalaires, exprimer le quotient à droite $Q(\lambda)$ et le reste à droite $R(\lambda)$ de la division de $A(\lambda)$ par $B(\lambda)$ en fonction des matrices A_o, A_1, A_2, A_3, B_o, B_1, B_2.

b) Appliquer les résultats ci-dessus pour expliciter le quotient et le reste à droite de la division de :

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^3 + 2\lambda + 1 & 2\lambda^3 + \lambda^2 \\ -\lambda^3 - \lambda^2 + 2 & 3\lambda^3 + 4\lambda \end{pmatrix} \text{ par } B(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 + 3 & -\lambda^2 + 1 \\ -\lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 2 \end{pmatrix}$$

.../...

QUESTION III

Soit $F(\lambda)$ un polynôme matriciel d'ordre n et de degré m. Il peut être écrit :

soit(1) $F(\lambda) = F_o \lambda^m + F_1 \lambda^{m-1} + \ldots + F_i \lambda^{m-i} + \ldots + F_{m-1}\lambda + F_m \quad (F_o \neq 0)$

soit(2) $F(\lambda) = \lambda^m F_o + \lambda^{m-1} F_1 + \ldots + \lambda^{m-i} F_i + \ldots + \lambda F_{m-1} + F_m$

compte tenu du fait que λ est un scalaire.

Une matrice A d'ordre n étant donnée, on appelle valeur à droite de $F(\lambda)$ pour A la matrice :

$$F(A) = F_o A^m + F_1 A^{m-1} + \ldots + F_i A^{m-i} + \ldots + F_{m-1} A + F_m$$

obtenue par substitution de A au scalaire λ dans la forme (1) . De même la valeur à gauche de $F(\lambda)$ pour A s'obtiendrait en substituant A à λ dans (2) .

On note E la matrice unité d'ordre n :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & - & - & 0 \\ 0 & 1 & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & 1 \end{pmatrix}$$

a) En prenant successivement m = 2 puis m = 3, déterminer en fonction de A et des coefficients de $F(\lambda)$ le reste à droite de la division suivant les puissances décroissantes de $F(\lambda)$ par le polynôme matriciel $(\lambda E - A)$.

A quelle condition le polynôme matriciel $F(\lambda)$ est-il divisible à droite par $(\lambda E - A)$ dans chacun des cas m = 2 puis m = 3.

b) Le résultat trouvé peut-il être étendu à un degré m quelconque ?

QUESTION IV

Soit A une matrice carrée scalaire d'ordre 2, de terme général a_{ij} (l'indice de gauche désigne systématiquement la ligne, celui de droite la colonne) et $C = \lambda E - A$ la matrice dont le déterminant $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ est le polynôme caractéristique de A.

On note $B(\lambda)$ la matrice dont le terme général b_{ij} (ième ligne, jème colonne) est donné par :

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det C_{ji}$$

où C_{ji} est la sous-matrice de C obtenue par suppression de la $j^{ième}$ ligne et de la $i^{ème}$ colonne.

Exprimer la matrice $B(\lambda)(\lambda E - A)$ en fonction du polynôme caractéristique $\Delta(\lambda)$. Que peut-on dire de la matrice $\Delta(A)$?

.../...

EXERCICE I

Dans une entreprise, on relève durant le mois de mai, sur un échantillon d'une centaine d'employés, la distribution statistique suivante du couple de variable (X, Y) défini par :

X = âge de l'employé

Y = nombre de journées d'absence en mai

Classe d'âge	X \ Y	0	1	2	3
20 - 30	25	2	10	6	2
30 - 40	35	15	10	5	0
40 - 50	45	2	18	15	5
50 - 60	55	0	2	4	4

Dans la suite nous ferons l'hypothèse suivante : les âges sont répartis en 4 classes $[20, 30[$, $[30, 40[$, $[40, 50[$, $[50, 60[$ et à tous les employés d'une même classe est attribué le même âge égal au centre de la classe (25, 35, 45, 55).

Question :

Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X en utilisant directement, sans les démontrer, les formules du cours. Tracer dans un repère orthonormé d'axes $O\vec{x}$, $O\vec{y}$ la droite de régression de Y en X.

EXERCICE II

Soit f une fonction réelle de deux variables réelles indépendantes x et y définie par :

$$f(x, y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 - x + 2y$$

Question 1 :

Déterminer s'il existe ou s'ils existent, le ou les extrema de f (on précisera la nature du ou des extrema).

Question 2 :

Calculer $z(X, Y) = f(X + \frac{1}{2}, Y - 1) + \frac{5}{4}$

Démontrer l'inégalité $z(X, Y) > 0$ pour tout couple $(X, Y) \neq (0, 0)$.

Etudier les courbes $z(X, Y) = k$ suivant les valeurs réelles de k.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail